EULEROVA I BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA U LINEARNOJ TEORIJI VALOVA

dr. sc. Tatjana Stanivuk, prof. Pomorski fakultet u Splitu, Sveučilište u Splitu Zrinsko-Frankopanska 38, 21000 Split, Hrvatska
Ivana Zore, dipl. ing.
Brodosplit
Put Supavla 21, 21000 Split, Hrvatska

Sažetak: *Kopnene zalihe nafte, kao najvažnijeg izvora energije današnjice, gotovo su iscrpljene. Međutim, ispod oceana i svjetskih mora leže golema nalazišta nafte. Upravo ta činjenica uvjetovala je razvoj i ekstremno brzi napredak pomorstvenosti. Teorija pomorstvenosti, kao grana hidromehanike, proučava osnivanje, projektiranje i održavanje odobalnih objekata. U spomenutu svrhu rade se statističke analize i modeli valnog okruženja, te izračuni sila, opterećenja i izmjena energija. Eulerova i Bernoullijeva jednadžba predstavljaju polazišne točke u prethodno spomenutim proračunima. Eulerove jednadžbe predstavljaju jedan od temelja mehanike fludia. Uz pretpostavku da je strujanje stacionarno, a fluid idealan, Euler je u svojim jednadžbama dokazao da se II. Newtonov zakon može primjeniti i na tijela bez stalnog oblika. Bernoullijeva jednadžba predstavlja, pojednostavljeno gledajući, zakon očuvanja energije u fluidu koji se giba. Ista prikazuje odnos između brzine, tlaka i gustoće tekućine u kretanju.*

Ključne riječi: *pomorstvenost, Eulerove jednadžbe, Bernoullijeva jednadžbe, valovi, fluidi.*

EULER AND BERNOULLI'S EQUATION IN LINEAR WAVE THEORY

Abstract: *Land reserves of oil, as the modern era's most important source of energy, have been almost exhausted. However, vast deposits of oil and natural gas lie beneath the oceans and seas. This fact has influenced the development of marine engineering and extremely rapid progress of sea keeping. As a field of hydrodynamics, sea keeping theory researches design and maintenance of offshore structures. Statistical analysis, wave models, force and energy calculations, structural analysis, etc. are various fields of research in sea keeping theory. The Euler and Bernoulli's equations serve as the starting points in the above calculations. Euler's equations represent a solid base for further calculations in fluid mechanics. Assuming that the flow is steady, and the fluid is ideal, Euler's equations prove that the Newton's second law can be applied to entities without a permanent shape, i.e. fluids. The Bernoulli's equation represents, quite simply, the conservation of energy law within the fluid in motion. It describes the relations among the velocity, pressure, and density of the liquid in motion.*

Key words: *sea keeping, Euler`s equations, Bernoulli`s equation, waves, fluids*

1. UVOD

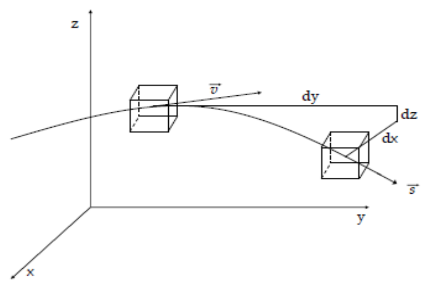
Utjecaj valova od velike je važnosti prilikom projektiranja broda ili plovnog objekta jer isti uzrokuju ne samo znatno opterećenje konstrukcije, već uvjetuju i vijek i uvjete eksploatacije same konstrukcije.Uzburkano more smatra se slučajnim procesom, svaki val ima svoje karakteristike, te je stoga teško primjeniti zakone klasične mehanike na slučajan proces. Problem je nužno pojednostaviti, tj. svesti različite karakteristike vala u model. Brojne su teorije i modeli koje nastoje složena valna gibanja svesti na dvodimenzionalne ili trodimenzionalne modele. Najjednostavnija od tih teorija poznata je pod nazivom teorija male amplitude ili linearna teorija valova, gdje se valna zbivanja nastoje svesti u dvodimenzionalni kontekst. Najpogodniji model vala koji objašnjava strujanja i sve pojave u valu naziva se Airyev val ili model harmonijskog progresivnog vala. Rezultati korištenja ove metode i upotrebe ovog modela daju prihvatljive rezultate analize, vodeći računa o ograničenjima same teorije.Eulerova jednadžba predstavlja primjenu II. Newtonovog zakona na fluid, dakle izražava ravnotežu sila na materijalnoj čestici tekućine koja se pri tome nalazi u gibanju. U dinamici fluida Eulerove jednadžbe opisuju protok idealnog fluida, te pojednostavljeno gledajući predstavljaju zakon očuvanja mase i količine gibanja.

Bernoullijeva jednadžba predstavlja pojednostavljeno gledajući zakon očuvanja energije u fluidu koji se giba. Bernoullijeva jednadžba prikazuje odnos između brzine, tlaka i gustoće tekućine u kretanju. Kreće se od pretpostavke da je u slučaju stabilnog strujanja nestlačive idealne tekućine, bez trenja, ukupna energija tekućine jednaka duž svih presjeka. Porastom brzine tekućine pada njen hidrostatski tlak i obratno. Zbroj hidrostatskog tlaka i hidrodinamičkog tlaka u vodoravnom strujanju daje ukupan tlak koji je konstantan u svim presjecima cijevi. Drugim riječima, Bernoullijeva jednadžba predstavlja zakon očuvanja energije koji nam u slučaju stacionarnog strujanja tekućine govori da za vrijeme stacionarnog strujanja jedinica mase tekućine (njen diferencijalni dio) ima konstantnu energiju duž cijele strujne cijevi.

2. EULEROVE JEDNADŽBE

Eulerova jednadžba predstavlja primjenu drugog Newtonovog zakona na neviskozne nestlačive fluide.[4]

***Slika 1.** Elementarna čestica fluida nošena tokom fluida kroz prostor, [5]*



Na (sl. 1.) prikazana je elementarna čestica fluida koju tok fluida nosi kroz prostor. Pri tome je brzina gibanja čestice opisana funkcijom $\vec{v}$(x, y, z, t) a gibanje se odvija po putu $\vec{s}$. U analizi njezinoga gibanja polazi se od drugog Newtonovog zakona [5]:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1)$$

Ukoliko se pretpostavi da je masa čestice konstantna i označi se sa *dm*, može se pisati:

$$d\vec{F} = dm\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2)$$

Razlomak $\frac{d\vec{v}}{dt}$ predstavlja ukupno ubrzanje čestice, a naziva se još materijalno ili supstancijalno ubrzanje. Ovaj izraz matematički predstavlja potpuni diferencijal, te ga se može razdvojiti na prostorni i vremenski dio:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (3)$$

Prvi član ($\frac{d\vec{v}}{dt}$) iz jednadžbe (3) naziva se lokalno ubrzanje i opisuje relativno ubrzanje čestice fluida u odnosu na okolne čestice. Postoji li ovaj član radi se o nestacionarnom strujanju.

Drugi član ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$) iz jednadžbe (3) naziva se konvektno ubrzanje i opisuje ubrzanje koje čestica fluida dobiva zbog strujanja fluida kao cjeline. [1]

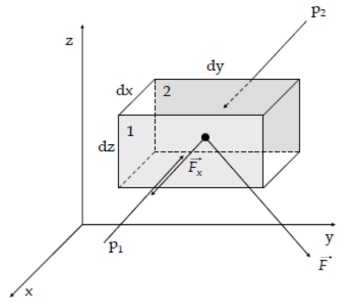
Masa razmatrane čestice fluida je:

$$dm = pdxdydz \quad (4)$$

Smatra se konstantom. Na nju djeluju tlačne sile u okomitom smjeru i sile mase sa hvatištem u središtu kvadra (sl.1). Masene sile opisuju se ubrzanjem koje postižu:

$$\vec{am} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (5)$$

gdje je $\vec{F}$ ukupna masena sila koja djeluje na kvadar. Masena sila je proporcionalna masi, navedene komponente se krate i ostaje samo ubrzanje.



***Slika 2.** Sile koje u x-smijeru djeluju na elementarni volumen fluida, [5]*

$$ma_x = p_2dydz + F_X - p_1dydz \quad (6)$$

U izrazu (8) p_1 predstavlja tlak na ulazu u kontrolni volumen, a p_2 tlak na izlazu iz kontrolnog volumena. Tlak je pri tome potrebno razviti u Taylorov red i zadržati samo prvi član:

$$p_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}dx \quad (7)$$

$$a_{mx}pdxdydz - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz - pdxdydza_x = 0$$
(8)

gdje je a_{mx}ubrzanje uslijed masene sile, a ukupno ubrzanje čestice fluida:

$$ax = \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

iz čega slijedi *x* komponenta Eulerove jednadžbe:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = a_{mx} - \frac{dvx}{dt} \quad (10)$$

Na isti se način dobijukomponente *y* i *z*Eulerove jednadžbe:

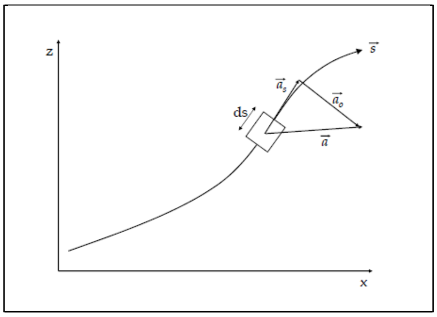
$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y} = a_{my} - \frac{dvy}{dt} \quad (11)$$

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z} = a_{mz} - \frac{dvz}{dt} \qquad (12)$$

2.1. Eulerova jednadžba za jednodimenzionalni slučaj

Čestica fluida giba se kroz prostor i opisuje putanju koja se može prikazati kontinuiranom krivuljom. Ukoliko je poznat oblik te krivulje može se položaj čestice fluida na njoj opisati samo s jednom varijablom, koja prestavlja put prevaljen po toj krivulji kao funkciju vremena:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s} = a_m - \frac{dv}{dt} \qquad (13)$$



Slika 3. *Čestica fluida u jednom vremenskom trenutku, [5]*

2.2. Eulerova jednadžba za fluid u polju sile teže

U slučaju sile teže ubrzanje je konstantno i usmjereno je vertikalno prema dolje. Ako je kut koji tangenta na krivulju po kojoj se čestica giba zatvara s vertikalom, može se pisati:

$$a_m = -g\cos\alpha \qquad (14)$$

iz čega slijedi oblik Eulerova jednadžbe:

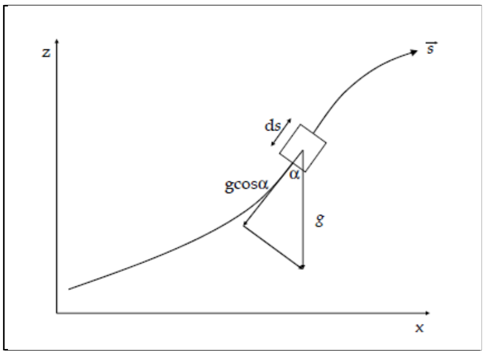
$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s} = -g\cos\alpha - \frac{dv}{dt} \qquad (15)$$

Diferencijal brzine može se rastaviti na lokalni i konvektivni dio:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} \qquad (16)$$

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s} = -g\cos\alpha - \left(\frac{dv}{dt} + v\,\frac{dv}{ds}\right) \qquad (17)$$

$$\cos\alpha = \frac{dz}{ds} \qquad (18)$$



Slika 4. *Gibanje čestice fluida po krivulji uz djelovanje gravitacijske sile, [5]*

Konačni izraz Eulerove jednadžbe u polju djelovanja gravitacije glasi:

$$\frac{1}{p}dp + gdz + \frac{\partial v}{\partial t}ds + vdv = 0 \qquad (19)$$

Integracijom se dobije oblik jednadžbe:

$$\frac{v2}{2} + \int\frac{dp}{p} + gz + \int\frac{\partial v}{\partial t}ds = \text{konst.} \qquad (20)$$

3. BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA

3.1. 1D slučaj

Idealni fluid je svaki fluid koji ne pruža nikakav otpor tečenju. Viskoznost takvog fluida ne postoji, te se radi o idealiziranom slučaju kada gubici zbog unutarnjeg trenja tekućine nisu veliki. Za idealni fluid vrijedi Eulerova jednadžba:

$$\frac{v2}{2} + \int \frac{dp}{p} + gz + \int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds = \text{konst.} \qquad (21)$$

Kada je tečenje stacionarno, zadnji član lijeve strane jednak je nuli, pa se dobiva kvazi 1D. Eulerova jednadžba za stacionarno strujanje:

$$\frac{v2}{2} + \int \frac{dp}{p} + gz = \text{konst.} \qquad (22)$$

Ukoliko se zanemari stlačljivost fluida, gustoća je konstantna što omogućuje formalno integranje gornje jednadžbe (24):

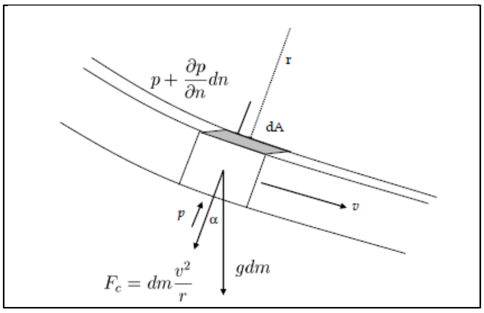
$$\frac{v2}{2} + \frac{p}{p} + gz = \text{konst.} \qquad (23)$$

Ovakav oblik jednadžbe naziva se Bernoullijeva jednadžba, vrijedi za stacionarno strujanje nestlačivog fluida i rješava probleme u dinamici fluida kada se strujanje može smatrati kvazi – jednodimenzionalnim.

Sva tri člana ove jednadžbe u fizikalnoj naravi predstavljaju unutarnju energiju fluida, pa je evidentno i da sam izraz predstavlja zakon o očuvanju energije za nestlačivi fluid.

3.2. 2D slučaj

Kod stacionarnog strujanja sile koje djeluju na česticu fluida okomito na strujnice, moraju se međusobno uravnotežiti, jer su linije toka u vremenu konstantne.[2]



Slika 5. *Sile koje djeluju na česticu fluida u smjeru okomitom na strujnice, [5]*

Na bočne plohe (ukoliko se pretpostavi da je strujna čestica u obliku malenog kvadrata) djeluje tlak, centrifugalna sila i komponenta sile teže u smjeru normale odgovarajuće plohe. Ukoliko je tlak na donju plohu *p*, onda je tlak na gornju plohu:

$$p + \frac{\partial p}{\partial n}\, dn \qquad (24)$$

Ravnoteža sile za gornju i donju plohu opisana sljedećim izrazom:

$$PdA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\, dn\right) dA + dm\frac{v2}{r} + dmg\cos\alpha = 0 \qquad (25)$$

Ukupna promjena tlaka sastoji se od dva dijela, dinamičkog i statičkog. Dinamički dio jednadžbe rezultira promjenom tlaka uslijed zakrivljenosti strujnice i inercijske centrifugalne sile, a statički dio predstavlja promjenu hidrostatičkog tlaka zbog promjene dubine fluida. Kada strujanja nema dobije se jednadžba hidrostatičke ravnoteže

$$dp_n = -pgdz \qquad (26)$$

Ukoliko se strujanje odvija u horizontalnoj ravnini i nema promjene hidrostatskog tlaka dobije se izraz:

$$dp_n = p\frac{v2}{r}\,dn \qquad (27)$$

Ova jednadžba naziva se jednadžba radijalne ravnoteže toka. Bernoullijeva jednadžba za nestlačivi fluid podijeli se sa g i dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{v2}{2g} + \frac{p}{pg} + z = z_0 \qquad (28)$$

Zbroj tlačne i geodetske visine jednak je visini energetskog horizonta i naziva se piezometarska visina i može se izravno mjeriti.

Kod korištenja Bernoullijeve jednadžbe za rješavanje problema u praksi koriste se po dvije odabrane točke na strujnici. Raspisivanjem te dvije točke i izjednačavanjem lijevih strana dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{v2}{2g} + \frac{p1}{pg} + z_1 = z_0 \qquad (28)$$

Zbroj tlačne i geodetske visine jednak je visini energetskog horizonta i naziva se piezometarska visina i može se izravno mjeriti.

Kod korištenja Bernoullijeve jednadžbe za rješavanje problema u praksi koriste se po dvije odabrane točke na strujnici. Raspisivanjem te dvije točke i izjednačavanjem lijevih strana dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{v12}{2g} + \frac{p1}{pg} + z_1 = \frac{v22}{2g} + \frac{p2}{pg} + z_2 \qquad (29)$$

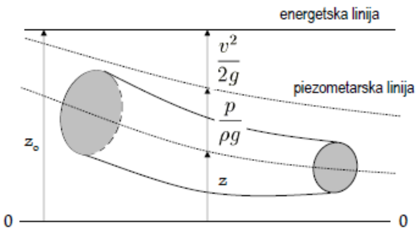
Točka 1 i 2 (sl. 7.) su neke dvije točke na istoj strujnici, te u ovome leži glavni problem Bernoullijeve jednadžbe: jednadžba vrijedi samo za jednu točno određenu strujnicu, a najčešće se ne zna tok te strujnice kroz prostor. Ovaj problem u praksi se zanemaruje, a u izračunu se koriste srednje vrijednosti veličina koje ulaze u jednadžbu. Daljnji eksperimentalni pokusi dokazali su da najveću pogrešku unosi upotreba srednje vrijednosti brzine. Izraz za izračun odstupanja dobije se integriranjem toka kinetičke energije:

$$\frac{dEk}{dt} = \frac{p}{2}v^3dA \qquad (30)$$

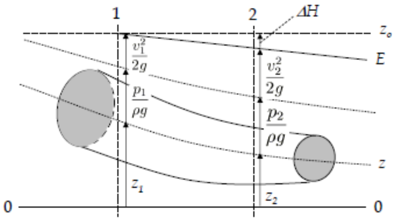
U svrhu dobivanja točnijeg izračuna, Bernoullijeva jednadžba se korigira uvođenjem Coriollisovog koeficijenta:

$$\sigma_1\frac{v12}{2g} + \frac{p1}{pg} + z_1 = \sigma_2\frac{v22}{2g} + \frac{p2}{pg} + z_2 \qquad (31)$$

Pri čemu Coriollisov koeficijent mora biti poznat. Ukoliko isti koeficijent nije poznat pretpostavlja se da iznosi 1. Kada se strujanje zaustavi Bernoullijeva jednadžba prelazi u jednadžbu hidrostatske ravnoteže:



Slika 6*. Grafički prikaz Bernoullijeve jednadžbe za idealne tekućine, [5]*



Slika7*.Grafički prikaz Bernoullijeve jednadžbe za realne tekućine, [5]*

3.3. Bernoullijeva jednadžba za realne tekućine

Viskozne gubitke energije kod strujanja realnih tekućina najčešće se opisuje ukupnim gubitkom nastalim između dva presjeka toka, koji se izražen kao gubitak energetske visine dodaje desnoj strani Bernoullijeve jednadžbe:

$$\frac{v12}{2g} + \frac{p1}{pg} + z_1 = \frac{v22}{2g} + \frac{p2}{pg} + z_2 + \Delta H \qquad (33)$$

Ovaj gubitak uvijek je veći od nule pa je u presjeku 2 (sl.8.) ukupna energetska visina tekućine smanjena za iznos gubitka.
Kod realnih tekućina ukupna energija tekućine se u smjeru toka stalno smanjuje i gornji izraz predstavlja Bernoullijevu jednadžbu za realne tekućine. [3]

Preko ovog izraza moguće je odrediti gubitke, no pri tome se mora osigurati stacionaran tok kroz cijev (konstantan protok). Na mjestima 1 i 2 (sl.8.) se prvo izmjeri piezometarska visina h_p:

$$h_p = (z+\frac{p}{\rho g}) \qquad (34)$$

Pomoću jednadžbe kontinuiteta odredi se srednja brzina toka na tim mjestima:

$$v_1A_1 = v_2A_2 = Q \qquad (35)$$

Pomoću Bernoullijeve jednadžbe za realne tekućine odredi se gubitak energetske visine:

$$\Delta H = (\frac{v12}{2g} + \frac{p1}{pg} + z_1) - \frac{v22}{2g} + \frac{p2}{pg} + z_2 \qquad (36)$$

Gubitak energetske visine izražen po jedinici duljine toka naziva se energetski gradijent ili energetski pad:

$$I_e = \frac{\Delta H}{i}$$

Gubitak piezometarske visine izražen po jedinici duljine toka naziva se piezometarski gradijent ili hidraulički gradijent (pad):

$$Ip = \frac{hp1 - hp2}{i} = \tan\alpha \qquad (38)$$

ZAKLJUČAK

U ovom radu izvedeni su izrazi za Eulerovo i Bernoullijevu jednadžbu. Kako je navedeno u samom uvodu zakonitosti mehanike krutih tijela nije moguće primjeniti u mehanici fluida. Bitne fizikalne zakone kao što su očuvanje energije i drugi Newtonov zakon moguće je primijeniti u mehanici fluida uz idealizaciju modela i pojedine pretpostavke.

Fluid se promatra kao kontinuum, što pojednostavljuje matematički model potreban za njegov opis. Elementarna čestica fluida definira se kao vrlo mala čestica čiji oblik ne mora biti stalan, ali masa mora biti konstantna. Koriste se infinitezimalno male dužine, površine, volumeni, itd. Osnovne dimenzije koje su u naravi dvodimenzionalne ili trodimenzionalne krivulje, promatraju se kao jednodimenzionalni problemi. Elementi površine ili volumena definiraju se na način da su im stranice postavljene paralelno sa koordinatnim osima.

Ove pretpostavke omogućavaju da sesloženi (višedimenzionalni) problem stohastičke naravi objasne klasičnim zakonima fizike.

U radu su navedena pojednostavljenja valne prirode koja vode do linearizacije problema, te je dokazano da je moguće uz navedene pretpostavke dokazati zakon očuvanja energije u mehanici tekućih tijela.

Proučavajući gibanja fluida, Euler je počeo sa pretpostavkom da se II. Newtonov zakon može primjeniti na infinitezimalnu česticu unutar tekućine. Vanjske sile koje djeluju na tu istu česticu definirao je kao tlak. U prvim eksperimentima navedene pretpostavke pokušao je dokazati na primjeru riječnog toka. Definirao je strujanje rijeke kao dvodimenzionalni problem, što je dovelo do direktnog razvoja Bernoullijeve jednadžbe, koja pokazuje odnos između brzine, tlaka i gustoće fluida u kretanju. U slučaju stacionarnog strujanja nestlačivog fluida (bez trenja) ukupna energija tekućine jednaka je duž svih presjeka promatranog volumena. Porastom brzine fluida pada statički tlak i obrnuto. Zbroj statičkog i dinamičkog tlaka u horizontalnom strujanju (linearizacija valnog gibanja) daje ukupan tlak koji je jednak u svim presjecima promatranog fluida. U slučaju stacionarnog strujanja tekućine jedinica mase tekućine ima konstantnu energiju u svim presjecima.

“The results presented in the paper have been obtained in the scientific research project No. 250-2502209-2364 and the international research Project “The possibilities of reducing pollutant emis- sions from ships in the Montenegrin and Croatian Adriatic implementing Anex VI of MARPOL Con-vention" supported by the Ministry of Science, Education and Sport of the Republic of Croatia.”

LITERATURA / References

[1]Andreić,Z., (2012.), *Temelji mehanike fluida*, Zagreb

[2] Prpić-Oršić, J., Čorić, V., (2006.), *Pomorstvenostplovnihobjekata*, Zigo, Rijeka

[3] Soresen, R. M., (1993.), *Basic Wave Mechanics for Coastal and Ocean Engineers*, A Wiley – Interscience Publications, New York

[4] Stanivuk, T., Zore, I., Lukša, F.,(2014.),*Calculation of the hydrodynamic loading on a vertically submerged cylinder by means of the morison equation*, 6th International Maritime Science Conference (IMSC), Solin

[5] Zore, I., (2013.), *Eulerova i Bernoullijevajednadžba u linearno jteoriji valova*, završni rad, Split

[6] WADAM, *Wave Analysis by Diffraction and Morison Theory*; SESAM User Manual; DNV Software Report No.94-7100, rev-3.